جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثانية

تحليل متجهات

سلالم تصحيح

عمارين دورات تحليل متجهات

(1)

تمرين (1): أوجد حجم متوازي المستطيلات الذي أبعاده

$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$

الحل:

الحجم $V = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \right| =$

$= |14 + 3 + 3| = 20$

تمرين (2): إذا كان

$\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$
$\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

أوجد

$|(2\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - 2\vec{B})|$

الحل:

$2\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow 2\vec{A} + \vec{B} = 5\vec{i} - \vec{k}$

$2\vec{A} - \vec{B} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

$(2\vec{A} + \vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 28\vec{j} - 20\vec{k}$

$|(2\vec{A} + \vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B})| = \sqrt{16 + 400 + 784} = \sqrt{1200} = 10\sqrt{12} =$

$= 20\sqrt{3}$.

تمرين (3): برهن أن الزاوية بين متجه الموضع $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ وبين متجه السرعة $\vec{r}'(t)$ هي $\theta = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$\vec{r}(t) = e^t \cos t\, \vec{i} + e^t \sin t\, \vec{j}$

$\vec{r}'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t)\vec{i} + (e^t \sin t + e^t \cos t)\vec{j}$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r(t)}\cdot\vec{r'(t)}|}{|\vec{r(t)}|\cdot|\vec{r'(t)}|}$$

$$|\vec{r(t)}\cdot\vec{r'(t)}| = |e^{2t}\cos^2 t - e^{2t}\sin t\cos t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\sin t\cos t|$$

$$= e^{2t}$$

$$|\vec{r(t)}| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t} = e^t$$

$$|\vec{r'(t)}| = \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t - 2e^{2t}\sin t\cos t + e^{2t}\sin^2 t + e^{2t}\cos^2 t + 2e^{2t}\sin t\cos t}$$

$$|\vec{r'(t)}| = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}\,e^t$$

$$\cos\theta = \frac{e^{2t}}{e^t\cdot\sqrt{2}e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

تمرين 14: إذا كان

$$\vec{A} = x^2y\,\vec{i} + y^2z\,\vec{j} + z^2x\,\vec{k}$$

$$\phi = xy + yz + zx$$

أوجد $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$ ، $\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ، $(\vec{\nabla}\phi)\times\vec{A}$ عند النقطة $(3,-1,2)$

الحل:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\phi = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

$$\phi\vec{\nabla} = \phi\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \phi\frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \phi\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\phi\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y+z & x+z & x+y \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix} = (z^2x^2 + z^3x - y^2zx - y^3z)\vec{i}$$

$$+ (x^3y + x^2y^2 - z^2xy - z^3x)\vec{j} + (y^3z + y^3z^2 - x^3y - x^2yz)\vec{k}$$

$$(\vec{\nabla}\phi \times \vec{A})\Big|_{(3,-1,2)} = (36+24-6+2)\vec{i} + (-27+3+12-24)\vec{j} + (-2+4+27+18)\vec{k} =$$

$$= 56\vec{i} - 36\vec{j} + 47\vec{k}$$

$$\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \phi\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \phi\frac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \phi\frac{\partial}{\partial z}(z^2x) =$$

$$= (xy + yz + zx)\left[2xy + 2yz + 2zx\right] = 2(xy+yz+zx)^2$$

$$\phi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\Big|_{(3,-1,2)} = 2(-3-2+6)^2 = 2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi = x^2y(y+z) + y^2z(x+z) + z^2x(x+y) =$$

$$= x^2y^2 + x^2yz + xy^2z + y^2z^2 + z^2x^2 + z^2xy$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_{(3,-1,2)} = 9+4+36-18+6-12 = 25$$

تمرين ١٥ إذا كان

$$\vec{A}\times\vec{B} = 8\vec{i} - 14\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A}+\vec{B} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

أوجد $\vec{A}$ و $\vec{B}$

الحل: لنفرض أن $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ومنه

$$\vec{B} = (5-a_1)\vec{i} + (3-a_2)\vec{j} + (2-a_3)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 5-a_1 & 3-a_2 & 2-a_3 \end{vmatrix} = (2a_2 - a_2a_3 - 3a_3 + a_2a_3)\vec{i} +$$

$$+ (5a_3 - a_1a_3 - 2a_1 + a_1a_3)\vec{j} + (3a_1 - a_1a_2 - 5a_2 + a_1a_2)\vec{k}$$

$$= (2a_2 - 3a_3)\vec{i} + (5a_3 - 2a_1)\vec{j} + (3a_1 - 5a_2)\vec{k} =$$

$$= 8\vec{i} - 14\vec{j} + \vec{k}$$

بالمطابقة نحصل على

$$\begin{cases} 2a_2 - 3a_3 = 8 \\ 5a_3 - 2a_1 = -14 \\ 3a_1 - 5a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 8 + 3a_3 \Rightarrow a_2 = \dfrac{8+3a_3}{2} \\ 2a_1 = 5a_3 + 14 \Rightarrow a_1 = \dfrac{5a_3+14}{2} \end{cases}$$

$$\frac{15a_3 + 42}{2} - \frac{40 + 15a_3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 \quad \text{محققة دوماً}$$

مما يدل ذلك أنه باختيار $a_3 \in \mathbb{R}$ نجد

$$a_2 = 4 + \tfrac{3}{2}a_3$$

$$a_1 = 7 + \tfrac{5}{2}a_3$$

حيث $\vec{A}\left(7 + \tfrac{5}{2}a_3, 4 + \tfrac{3}{2}a_3, a_3\right)$ و

$$\vec{B} = \left(5 - 7 - \tfrac{5}{2}a_3, 3 - 4 - \tfrac{3}{2}a_3, 2 - a_3\right)$$

$$\vec{B} = \left(-2 - \tfrac{5}{2}a_3, -1 - \tfrac{3}{2}a_3, 2 - a_3\right)$$

وذلك $\forall a_3 \in \mathbb{R}$.

تمرين [6]: إذا كان $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ بيّن أن $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = 0$ عند جميع النقاط عدا $(0,0,0)$

الحل: لنفرض

$$\phi = \frac{1}{r} = r^{-1} \quad \text{حيث} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -r^{-2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -r^{-2}\frac{x}{r} = \frac{-x}{r^3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{-y}{r^3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{-z}{r^3}$$

$$\vec{\nabla}\phi = -\frac{x}{r^3}\vec{i} - \frac{y}{r^3}\vec{j} - \frac{z}{r^3}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x r^{-3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-y r^{-3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-z r^{-3}\right)$$

$$= -r^{-3} - x\frac{\partial}{\partial x}(+r^{-3}) - r^{-3} - y\frac{\partial}{\partial y}(r^{-3}) - r^{-3} - z\frac{\partial}{\partial z}(r^{-3})$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3}) = \frac{\partial(r^{-3})}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -3r^{-4}\cdot\frac{x}{r} = \frac{-3x}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(r^{-3}) = \frac{\partial(r^{-3})}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -3r^{-4}\cdot\frac{y}{r} = \frac{-3y}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(r^{-3}) = \frac{\partial(r^{-3})}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = -3r^{-4}\cdot\frac{z}{r} = \frac{-3z}{r^5}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = -r^{-3} + \frac{3x^2}{r^5} - r^{-3} + \frac{3y^2}{r^5} - r^{-3} + \frac{3z^2}{r^5} =$$

$$= \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2) = \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^5}r^2 = \frac{-3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

تمرين [١٧]: أوجد معادلة المستوي المماس للسطح $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ عند النقطة $(1,-1,2)$

الحل:

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow 2xz^2 - 3xy - 4x - 7 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2z^2 - 3y - 4 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -3x \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 4xz$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,-1,2)} = 8 + 3 - 4 = 7$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,-1,2)} = -3 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,-1,2)} = 8$$

معادلة المستوي المماس المطلوب

$$7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0$$

$$7x - 7 - 3y - 3 + 8z - 16 = 0$$

$$\boxed{7x - 3y + 8z = 26}$$

تمرين (8): إذا كانت $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ وكانت u دالة في x و y قابلة للمفاضلة

برهن أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

الحل:



$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left[u_x\cos\theta + u_y\sin\theta\right] = \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}(u_x) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(u_y)$$

$$= \cos\theta\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_x)\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(u_x)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right] + \sin\theta\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_y)\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(u_y)\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right] =$$

$$= \cos\theta\left[u_{xx}\cdot\cos\theta + u_{xy}\sin\theta\right] + \sin\theta\left[u_{yx}\cdot\cos\theta + u_{yy}\sin\theta\right]$$

$$= u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\sin^2\theta$$

حيث $u_{xy} = u_{yx}$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = u_x\cdot(-r\sin\theta) + u_y(r\cos\theta)$$

$$= -ru_x\sin\theta + ru_y\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-ru_x\sin\theta + ru_y\cos\theta\right] =$$

$$= -r\left[\cos\theta\cdot u_x + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(u_x)\right] + r\left[-\sin\theta\, u_y + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(u_y)\right]$$

$$= -r\cos\theta\, u_x - r\sin\theta\left[\frac{\partial u_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right] -$$

$$- r\sin\theta\, u_y + r\cos\theta\left[\frac{\partial u_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta \cdot u_x - r\sin\theta\left[-r\sin\theta\, u_{xx} + r\cos\theta\, u_{xy}\right] -$$

$$- r\sin\theta\, u_y + r\cos\theta\left[-r\sin\theta\, u_{yx} + r\cos\theta\, u_{yy}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta\, u_x + r^2\sin^2\theta\, u_{xx} - r^2\sin\theta\cos\theta\, u_{xy} - r\sin\theta\, u_y$$

$$- r^2\sin\theta\cos\theta\, u_{xy} + r^2\cos^2\theta\, u_{yy}$$

بالتبديل لدينا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta +$$

$$+ u_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}u_x\cos\theta + \frac{1}{r}u_y\sin\theta - \frac{1}{r}\cos\theta\, u_x -$$

$$- \frac{1}{r}u_y\sin\theta + \sin^2\theta\, u_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta\, u_{xy} + \cos^2\theta\, u_{yy} =$$

$$= u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

وهو المطلوب.

تمرين [9]: لتكن الدالة المتجهة $\overrightarrow{F(t)}$ القابلة للاشتقاق على الفترة $[a,b]$

برهن أن: 1) الشرط اللازم والكافي لكي يكون للدالة المذكورة طول ثابت

هو أن يكون $\overrightarrow{F(t)} \perp \overrightarrow{F'(t)}$

2) الشرط اللازم والكافي لكي يكون للدالة المفروضة طول متغير وجهة

ثابتة هو أن يكون $\overrightarrow{F(t)} \parallel \overrightarrow{F'(t)}$

الحل: 1) لزوم الشرط: لنفرض أن الدالة $\overrightarrow{F(t)}$ لها طول ثابت وبالتالي:

$$|\overrightarrow{F(t)}| = const \Rightarrow |\overrightarrow{F(t)}|^2 = C \Rightarrow \overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F(t)} = C$$

نشتق فنحصل على

$$2\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)} = 0$$

ومنه $\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)} = 0$ ومنه $\overrightarrow{F(t)} \perp \overrightarrow{F'(t)}$

كفاية الشرط: لنفرض أن الدالة $\overrightarrow{F(t)}$ تحقق أن $\overrightarrow{F(t)} \perp \overrightarrow{F'(t)}$ ومنه

$$\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)} = 0 \Rightarrow 2\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)} = 0 \Rightarrow \left(|\overrightarrow{F(t)}|^2\right)' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{F(t)}|^2 = C \Rightarrow |\overrightarrow{F(t)}| = C_1$$

وهو المطلوب.

٢) لزوم الشرط: لنفرض أن $\vec{F}(t)$ دالة متغيرة الطول ثابتة الجهة ولتكن $\vec{K}$ متجه الوحدة المحمول (الموازي) لـ $\vec{F}(t)$ ولنفرض $f(t)=|\vec{F}(t)|$

ومنه نستطيع أن نكتب $\vec{F}(t)=f(t)\vec{K}$ وبما أن $\vec{K}$ متجه ثابت فإن $\vec{K'}=\vec{0}$ ومنه

$$\vec{F'}(t)=(f(t)\vec{K})'=f'(t)\vec{K} \Rightarrow \vec{F'}(t)\parallel\vec{F}(t)$$

كفاية الشرط: لنفرض أن $\vec{F}(t)=f(t)\vec{K}$ سنناقش حالتين:

أ) إذا كانت $\vec{K}$ ثابتة الجهة فإن $\vec{F}(t)$ ثابتة الجهة وهو المطلوب مباشرة أي يصبح $\vec{F}(t)$ ثابتة الجهة ومتغير الطول.

ب) إذا كانت $\vec{K}$ متغيرة الجهة عندئذ:

$$\vec{F'}(t)=f'(t)\vec{K}+f(t)\cdot\vec{K'}$$

ولدينا بالفرض $\vec{F}(t)\parallel\vec{F'}(t)$ مفروضة فإن $\vec{F}(t)\times\vec{F'}(t)=\vec{0}$ ومنه

$$\vec{0}=\vec{F}(t)\times\vec{F'}(t)=(f(t)\vec{K})\times\left(f'(t)\vec{K}+f(t)\vec{K'}\right)=$$
$$=f^2(t)\left(\vec{K}\times\vec{K'}\right)$$

وبما أن $f^2(t)\neq 0$ فإن $\vec{K}\times\vec{K'}=\vec{0}$ إما $\vec{K'}\neq\vec{0}$ و $\vec{K}\neq\vec{0}$

ومنه وباعتبار $\vec{K}$ متجه وحدة غير معدوم وغير ثابت بالفرض وبالتالي مشتقة عامودي عليه أي $\vec{K}\cdot\vec{K'}=0$ إذاً $\vec{K}$ متجه ثابت الجهة وبالتالي $\vec{F}(t)$ ثابتة الجهة وهو المطلوب.

تمرين (١٠): إذا كان

$$\vec{A}=5t^2\,\vec{i}+t\,\vec{j}-t^3\,\vec{k}$$
$$\vec{B}=\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}$$

أوجد $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ ، $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$

الحل

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=10t\,\vec{i}+\vec{j}-3t^2\,\vec{k}$$
$$\frac{d\vec{B}}{dt}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -3t^2\cos t\,\vec{i} - 3t^2\sin t\,\vec{j} + (-10t\cos t - \sin t)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} = t^3\sin t\,\vec{i} - t^3\cos t\,\vec{j} + (5t^2\sin t - t\cos t)\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = (-3t^2\cos t + t^3\sin t)\vec{i} + (-3t^2\sin t - t^3\cos t)\vec{j} + (-11t\cos t - \sin t + 5t^2\sin t)\vec{k}$$

حاجة أوضح

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} = 10t\sin t - \cos t$$

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} = 5t^2\cos t + t\sin t$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = 10t\sin t - \cos t + 5t^2\cos t + t\sin t.$$

تمرين [11]: أوجد معادلة المستوي المماس للسطح

$x^3 + 3xyz + 2y^3 - z^3 = 5$ عند النقطة $P(1,1,1)$

الحل: لدينا معادلة السطح $\underbrace{x^3 + 3xyz + 2y^3 - z^3 - 5}_{F(x,y,z)} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 3yz \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 3xz + 6y^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 3xy - 3z^2$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = 6 \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = 9 \;,\; \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = 0$$

معادلة المستوى المماس المطلوب

$$6(x-1) + 9(y-1) + 0(z-1) = 0$$

$$\boxed{6x + 9y = 15}$$

تمرين [١٢]: إذا عرفنا معادلات التحويل من إحداثيات ديكارتية متعامدة إلى إحداثيات اسطوانية مكافئة بالمعادلات

$$x = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \;,\; y = uv \;,\; z = z$$

أوجد ١) ds^2 وعوامل القياس

٢) جاكوبيان التحويل وعنصر الحجم.

الحل: ١) لدينا

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial z} dz$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial z} dz$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) \cdot (dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k})$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} du\,dv + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial z} du\,dz + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 dz^2 + 2\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial z} dv\,dz + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 du^2$$

$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 dz^2 + 2\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} du\,dv + 2\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} du\,dz +$$

$$+ 2\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial z} dv\,dz + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 dz^2$$

$$+ 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} du\,dv + 2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial z} dv\,dz + 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial z} du\,dz$$

$$\Rightarrow ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2\right] dz^2 + 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right] du\,dv$$

$$+ 2\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial z}\right] du\,dz +$$

$$+ 2\left[\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial z}\right] dv\,dz$$

$$\Rightarrow ds^2 = \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\right) du^2 + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial z}\right)^2 dz^2 +$$

$$+ 2\,\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\,du\,dv + 2\,\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial z}\,du\,dz + 2\,\frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial z}\,dv\,dz$$

حيث $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

يكون لدينا

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} = u\vec{i} + v\vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = -v\vec{i} + u\vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = \vec{k}$$

ومنه نلاحظ شرط [illegible]

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial u}\right)^2 = u^2 + v^2$$

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2$$

$$\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial z}\right)^2 = 1$$

وهي عوامل القياس

وبالتالي

$$\boxed{ds^2 = (u^2+v^2)\,du^2 + (u^2+v^2)\,dv^2 + dz^2}$$

٢) جاكوبيان التحويل:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= u^2 + v^2$$

عنصر الحجم

$$dx\,dy\,dz = |J|\,du\,dv\,dz$$

$$\boxed{dx\,dy\,dz = (u^2+v^2)\,du\,dv\,dz}$$

تمرين ١١٣: ١) أوجد تحليلياً "وبيانياً" محصلة المتجهات التالية:

$\vec{A}(10,30^\circ)$, $\vec{B}(30,60^\circ)$, $\vec{C}=(10,120^\circ)$

٢) بيّن أن المتجهات التالية

$\vec{a}(1,-2,1)$, $\vec{b}(2,1,-1)$, $\vec{c}(7,-4,1)$

مرتبطة خطياً

٣) أوجد الزاوية المحصورة بين المتجه $\vec{OP}$ والمتجه $\vec{OQ}$ حيث O مبدأ الاحداثيات و $P(1,2,3)$ و $Q(2,-3,-1)$ وأوجد مقدار (طويلة) المتجه $\vec{PQ}$

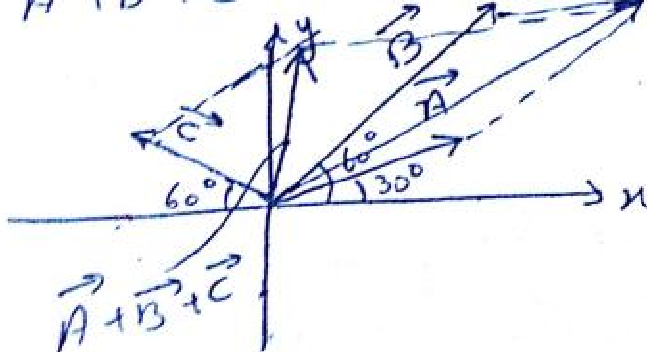
الحل: ١)

$$\vec{A}(10,30^\circ) = 10\cos 30^\circ\,\vec{i} + 10\sin 30^\circ\,\vec{j} = 5\vec{i} + 5\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\vec{B}(30,60^\circ) = 30\cos 60^\circ\,\vec{i} + 30\sin 60^\circ\,\vec{j} = 15\vec{i} + 15\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\vec{C}(10,120^\circ) = 10\cos 120^\circ\,\vec{i} + 10\sin 120^\circ\,\vec{j} = -5\vec{i} + 5\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} = 15\vec{i} + 25\sqrt{3}\,\vec{j}$$



٤) نفرض وجود الأعداد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3)\vec{i} + (-2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3)\vec{j} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 & \text{--- ①} \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 & \text{--- ②} \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \text{--- ③} \end{cases}$$

بجمع ① مع ② مع ③ نحصل على

$$2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -2\lambda_3}$$

نعوض في ①

$$\lambda_1 - 4\lambda_3 + 7\lambda_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -3\lambda_3}$$

نعوض في ②

$$6\lambda_3 - 2\lambda_3 - 4\lambda_3 = 0 \Rightarrow 6\lambda_3 - 6\lambda_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

نعوض في ③

$$-3\lambda_3 + 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow -3\lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

حيث $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ إختيارية ويوجد عدد لانهائي من الحلول تمثل بالحل

$$(-3\lambda_3, -2\lambda_3, \lambda_3) \quad \forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

بالتبديل نجد أن

$$-3\lambda_3 \vec{a} - 2\lambda_3 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$$

$$(-3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})\lambda_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}}$$

وهي علاقة الارتباط.

٣)

$$\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OQ} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{|2 - 6 - 3|}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{4+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

ومنه فإن $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42}$$

تمرين [١٤]: ١) إذا كان

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

أوجد $(\vec{A} + 2\vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B})$

٢) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي قطراه

$$\vec{A} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

الحل: ١)

$$\vec{A} + 2\vec{B} = 7\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$2\vec{A} - \vec{B} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$(\vec{A} + 2\vec{B}) \times (2\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 5 & 0 \\ 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -25\vec{i} + 35\vec{j} - 55\vec{k}$$

٢)



نحسب طويلة الجداء الخارجي للقطرين

$$|(\vec{C} + \vec{D}) \times (\vec{D} - \vec{C})| = |\vec{C} \times \vec{D} - \vec{C} \times \vec{C} + \vec{D} \times \vec{D} - \vec{D} \times \vec{C}|$$

$$= |(\vec{C} \times \vec{D}) + (\vec{C} \times \vec{D})| = 2|\vec{C} \times \vec{D}| = 2S$$

صيغة حساب مساحة متوازي الأضلاع بدلالة قطريه

$$S = \frac{1}{2}|(\vec{C} + \vec{D}) \times (\vec{D} - \vec{C})| = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

لــب

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & -3 & 4\end{vmatrix}=-10\vec{i}-14\vec{j}-8\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{100+196+64}=\frac{1}{2}\sqrt{360}=\frac{1}{2}\sqrt{4(90)}=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{40}=\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{2}\sqrt{5}=3\sqrt{10}$$ وحدة مربعة

تمرين ١٥: ١) إذا كان $\vec{A}=3xz^2\vec{i}-yz\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$

أوجد $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

٢) إذا كان $\vec{r}=x^2y\vec{i}-2y^2z\vec{j}+xy^2z^2\vec{k}$

أوجد $\left|\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial y^2}\right|$

الحل ١)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 3xz^2 & -yz & x+2z\end{vmatrix}=(0+y)\vec{i}+(6xz-1)\vec{j}+(0-0)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=y\vec{i}+(6xz-1)\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & 6xz-1 & 0\end{vmatrix}=-6x\vec{i}+0\vec{j}+(6z-1)\vec{k}$$

$$=-6x\vec{i}+(6z-1)\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = 2xy\,\vec{i} + y^2z^2\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = x^2\,\vec{i} - 4yz\,\vec{j} + 2xyz^2\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} = 2y\,\vec{i} \qquad \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = -4z\,\vec{j} + 2xz^2\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2y & 0 & 0 \\ 0 & -4z & 2xz^2 \end{vmatrix} = -4xyz^2\,\vec{j} - 8zy\,\vec{k}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2} \right| = \sqrt{16x^2y^2z^2 + 64z^2y^2} = 4zy\sqrt{x^2+4}$$

تمرين [١١٦]: إذا كان متجه الموضع للمنحني الفراغي هو

$$\vec{r} = 3\cos 2t\,\vec{i} + 3\sin 2t\,\vec{j} + (8t-4)\,\vec{k}$$

أوجد: ١) متجهات الوحدة $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$

٢) التقوس والالتفاف ونصف قطر الالتفاف.

الحل:

طريقة أولى:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -6\sin 2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{36\sin^2 2t + 36\cos^2 2t + 64} = \sqrt{100} = 10 \neq 0$$

الوسيط الطبيعي

$$s = \int \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = 10t \quad \Rightarrow \boxed{s = 10t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{ds} = \frac{1}{10}}$$

لدينا

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{10}\left(-6\sin 2t\,\vec{i} + 6\cos 2t\,\vec{j} + 8\,\vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{T} = -\frac{3}{5}\sin 2t\,\vec{i} + \frac{3}{5}\cos 2t\,\vec{j} + \frac{4}{5}\,\vec{k}}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{10}\left(-\frac{6}{5}\cos 2t\,\vec{i} - \frac{6}{5}\sin 2t\,\vec{j}\right)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{3}{25}\cos 2t\,\vec{i} - \frac{3}{25}\sin 2t\,\vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{9}{625}} = \frac{3}{25} = K$$ تقوس المنحنى

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{25}{3}$$ نصف قطر التقوس

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|} = -\cos 2t\,\vec{i} - \sin 2t\,\vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3}{5}\sin 2t & \frac{3}{5}\cos 2t & \frac{4}{5} \\ -\cos 2t & -\sin 2t & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{4}{5}\sin 2t\,\vec{i} - \frac{4}{5}\cos 2t\,\vec{j} + \frac{3}{5}\vec{k}$$

ج) من معادلة فرينيه

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{10}\left[\frac{8}{5}\cos 2t\,\vec{i} + \frac{8}{5}\sin 2t\,\vec{j}\right]$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{4}{25}\cos 2t\,\vec{i} + \frac{4}{25}\sin 2t\,\vec{j}$$

والجهة الأخرى

$$-\tau\vec{N} = \tau\cos 2t\,\vec{i} + \tau\sin 2t\,\vec{j}$$

بالمطابقة نحصل على

$\tau = \frac{4}{25}$ الالتفاف , أما نصف قطر الالتفاف

$$\rho^* = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$$

طريقة ثانية لحساب التقوس والالتفاف

يمكننا استخدام الدساتير

$$K = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|}{|\vec{r'}|^3}$$

$$\tau = \frac{[\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''}]}{|\vec{r'} \times \vec{r''}|^2}$$

$$\vec{r} = 3\cos 2t\, \vec{i} + 3\sin 2t\, \vec{j} + (8t-4)\vec{k}$$

$$\vec{r'} = -6\sin 2t\, \vec{i} + 6\cos 2t\, \vec{j} + 8\vec{k}$$

$$\vec{r''} = -12\cos 2t\, \vec{i} - 12\sin 2t\, \vec{j}$$

$$\vec{r'''} = 24\sin 2t\, \vec{i} - 24\cos 2t\, \vec{j}$$

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6\sin 2t & 6\cos 2t & 8 \\ -12\cos 2t & -12\sin 2t & 0 \end{vmatrix} = 96\sin 2t\, \vec{i} - 96\cos 2t\, \vec{j} + 72\vec{k}$$

$$|\vec{r'} \times \vec{r''}|^2 = (96)^2 + (72)^2 = 9216 + 5184 = 14400$$

$$|\vec{r'}|^3 = (36+64)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{100})^3 = 1000$$

$$[\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''}] = \begin{vmatrix} -6\sin 2t & 6\cos 2t & 8 \\ -12\cos 2t & -12\sin 2t & 0 \\ 24\sin 2t & -24\cos 2t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(12)(24) = 2304$$

$$K = \frac{\sqrt{14400}}{1000} = \frac{120}{1000} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

$$\tau = \frac{2304}{14400} = \frac{4(576)}{25(576)} = \frac{4}{25}$$

وهو المطلوب .

تمرين ١٧ : أوجد النقاط الشاذة للمنحني المعطى بالمعادلة

$$F(x,y) = (y-3)^2 - (x+2)^3 = 0$$

الحل: لنحسب

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3(x+2)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-3)$$

لنضع

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(x+2)^2 = 0 \\ 2(y-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ y = 3 \end{matrix}$$

لدينا النقطة الشاذة الوحيدة $(-2,3)$ وهي تحقق معادلة $F(x,y)=0$

من جهة أخرى

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6(x+2) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(-2,3)} = 0 \;,\; \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{(-2,3)} = 2 \;,\; \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right|_{(-2,3)} = 0$$

لنحسب

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

وبالتالي النقطة الشاذة نقطة راجع لتحديد نوعها نوجد معادلة المماس حيث لدينا معادلة الميل

$$m^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2m \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow 2m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

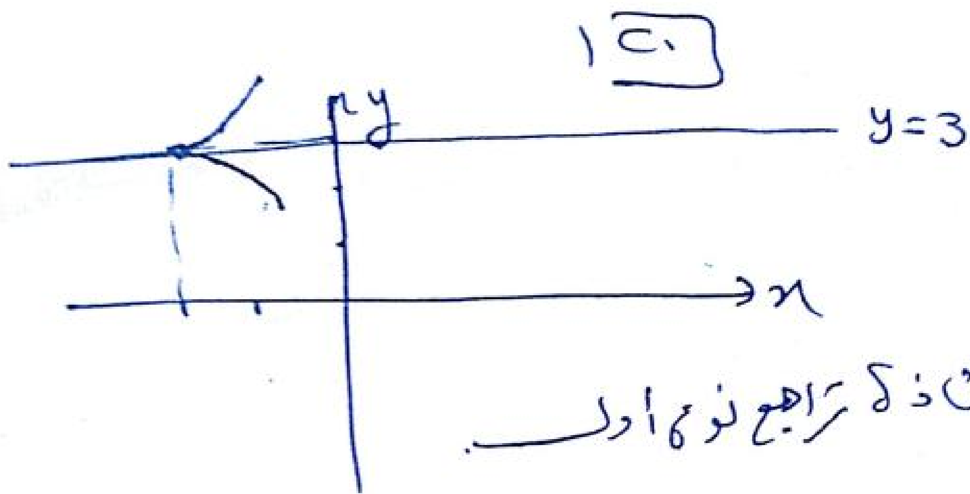
ومعادلة المماس (مستقيم ميله صفر ويمر بالنقطة $(-2,3)$) ومنه معادلته

$$\boxed{y = 3}$$

ولدينا من معادلة المنحني

$$(y-3)^2 = (x+2)^3$$

$$y = 3 \mp \sqrt{(x+2)^3}$$





انتهى